

# Математика для экономистов-2

Модуль 2, 2024-5

Озгур Эврен  
Российская Экономическая Школа  
oevren@nes.ru

## Информация о курсе

---

Сайт курса: <https://my.nes.ru>

Часы консультаций: по договорённости

Время занятий: Вторник 15:30–17:00, Четверг 15:30-17:00

Комната: 427

Ассистенты: Виктор Петухов ([vpetukhov@nes.ru](mailto:vpetukhov@nes.ru)), Кирилл Савин ([ksavin@nes.ru](mailto:ksavin@nes.ru))

## Описание курса

---

Данный курс рассматривает рекурсивные задачи динамической оптимизации, используемые в экономических моделях, с математической точки зрения, чтобы помочь студентам освоить инструменты, необходимые для понимания, формулировки и решения таких задач. Первая половина курса посвящена детерминированным задачам оптимизации в дискретном времени. Во второй половине курса мы будем обсуждать неопределенность.

## Требования к курсу, оценивание и политика посещаемости

---

В течение семестра будут задаваться еженедельные домашние задания (20% оценки) и проводиться итоговый экзамен (80% оценки). В соответствии с общей политикой РЭШ, студенты имеют право на пересдачу, если они пропустили итоговый экзамен по уважительной причине или если они получили на нем неудовлетворительную оценку. Сложность заданий и оценивание на пересдаче могут отличаться от таковых на итоговом экзамене.

## Содержание курса

---

*Часть 1: Детерминированное динамическое программирование*

1. Уравнение Беллмана, существование решения, свойства функций ценности, приложения
2. Уравнения Эйлера, условия трансверсальности, теорема достаточности
3. Краткий обзор динамической устойчивости

## Часть 2: Неопределённость

4. Цепи Маркова и асимптотическая стационарность
5. Стохастическое динамическое программирование, применения

### Описание методологии курса

---

Если позволят внешние условия, преподаватель будет использовать традиционные методы обучения в аудитории (т.е. доска, маркер и устные обсуждения). В противном случае занятия будут проходить онлайн. В любом случае студентам рекомендуется участвовать в лекциях с вопросами и комментариями. Посещаемость особенно важна, поскольку конспектов лекций будет достаточно, и обязательного учебника нет.

### Материалы курса

---

#### Необходимые учебники:

Обязательного учебника нет. Конспектов лекций будет достаточно.

#### Дополнительная/факультативная литература:

Ljungqvist, L. and Sargent, T., *Recursive Macroeconomic Theory*, MIT Press, 2004.

Stokey, N.L. and Lucas, R.E., with Prescott, E.C., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, 1989.

Примечания: Stokey and Lucas - это отличный справочник по основам динамического программирования в дискретном времени, хотя он не очень подходит для самостоятельного изучения, если вы не знакомы с функциональным анализом. Ljungqvist and Sargent более доступны, фокусируются на основных аспектах, но не углубляются в некоторые важные вопросы.

### Политика академической честности

---

Списывание, плагиат и любые другие нарушения академической этики в РЭШ не допускаются.

### Примеры заданий для оценки

---

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного  $k_0 \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\max_{(c_t)_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

при условии  $c_t \leq k_t$ ,  $k_{t+1} = k_t - c_t$ , и  $c_t, k_t \in \mathbb{R}_+$  для  $t = 0, 1, \dots$  (SP)

$k_t$  и  $c_t$  обозначают запас капитала и потребление в момент времени  $t$  соответственно, а  $\beta \in (0, 1)$  - это дисконтирующий множитель. Сбережения  $k_t - c_t$  становятся запасом капитала в момент времени  $t+1$ .

Пусть  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Для любой функции  $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , определим еще одну функцию  $Tv : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  как

$$Tv(k) = \sup_{c \in [0, k]} \ln(c) + \beta v(k - c) \quad \forall k \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Уравнение Беллмана относится к следующему функциональному уравнению:

$$v(k) = Tv(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}_+.$$

a) Используйте метод «догадайся и проверь», чтобы найти решение  $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  уравнения Беллмана.

b) Определите функцию  $v_0$  как  $v^0(k) = \frac{\ln k}{1-\beta}$  для каждого  $k \in \mathbb{R}_+$ . По индукции, пусть  $v^n = Tv^{n-1}$  для каждого  $n \geq 1$ . Используя условия первого порядка для задачи (1), покажите, что  $\lim_n v^n(k) = v(k)$

для каждого  $k \in \mathbb{R}_+$ , где  $v$  обозначает функцию, которую вы нашли в пункте

(a). (Подсказка. Существует такая константа  $D$ , что  $v^n(k) = v^0(k) + D \sum_{l=0}^{n-1} \beta^l$

для каждого  $k \in \mathbb{R}_+$ .)

c) Сделайте вывод, что для любого  $k = k_0$  максимальное значение в (SP) равно  $v(k)$ . Проверьте все предположения в соответствующей теореме, которую мы рассматривали на занятиях.

d) Запишите уравнения Эйлера в терминах уровней потребления.

e) Покажите, что, учитывая ограничения в (SP) и уравнения Эйлера, условие трансверсальности выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_t k_t = 0 \text{ iff } \sum_{t=0}^{\infty} c_t = k_0.$$

f) Сделайте вывод, что оптимальная последовательность потребления, следующая из уравнения Беллмана, также порождается уравнениями Эйлера и условием трансверсальности.

